Rapport de stage de Master 2

Ordre total de réductibilité d'un pinceau de courbes algébriques planes

Christopher Goyet
Responsable du stage : Laurent Busé

Mars 2009 - Juin 2009

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'ordre total de réductibilité d'un pinceau de courbes algébriques planes. On prouvera que le nombre de courbes réductibles est borné par $d^2 - 1$, où d est le degré du pinceau. On suivra principalement l'article de Laurent Busé et de Guillaume Chèze [BC08], où chaque facteur des courbes réductibles du pinceau est compté avec multiplicité. En comparaison avec la littérature traitant de ce sujet, une meilleure borne est ainsi donnée et la preuve n'utilise que des outils mathématiques élémentaires. En effet, elle est obtenue comme conséquence d'un calcul de rang de matrices.

Remerciements

Je tiens à remercier très sincèrement Laurent Busé, mon directeur de stage, pour le temps qu'il m'a consacré. Il a toujours fait preuve de beaucoup de patience et de pédagogie lors de nos entretiens. Je souhaite aussi le remercier chaleureusement pour tous ses bons conseils et ses encouragements, qui ont rendu ce stage agréable, intéressant et très formateur. Grâce à lui, je garderai donc un très bon souvenir de ce premier contact excellent avec la recherche.
Je tiens également à remercier M.Elkadi et les quelques thésards du laboratoire qui m'ont écouté, en particulier Michel Raibaut, pour son aide précieuse.

Table des matières

1 Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $r(X,Y) = f(X,Y)/g(X,Y)$ une fonction rationnelle dans $\mathbb{K}(X,Y)$, avec $\text{pgcd}(f,g) = 1$. Le degré N de la fonction rationnelle r est $N = \deg(r) = \max(\deg(f), \deg(g))$. On dit que la fonction rationnelle r est non-composée si elle ne peut pas s'écrire $r = u \circ h$ où $h(X,Y) \in \mathbb{K}(X,Y)$ et $u \in \mathbb{K}(T)$ tel que $\deg(u) \geq 2$. A la fonction $r = f/g$, on associe le pinceau $\mu f + \lambda g$, $(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Son spectre est l'ensemble

$$\sigma(f,g) = \{(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \,|\, \mu f^{\#} + \lambda g^{\#} \text{ réductible dans } \mathbb{K}[X,Y,Z]\} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$$

où $f^{\#}$ et $g^{\#}$ sont les homogénéisés de degré N de f et g respectivement.

Pour $(\mu : \lambda) \in \sigma(f,g)$, on a donc une décomposition en facteurs irréductibles et homogènes de la forme :

$$\mu f^{\#} + \lambda g^{\#} = \prod_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} P_{(\mu:\lambda),i}^{e_{(\mu:\lambda),i}}$$

Si $\sigma(f,g)$ est fini, l'ordre total de réductibilité $\rho(f,g)$ de r (notation de [Stein]) est défini par la somme finie

$$\rho(f,g) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} (n(\mu:\lambda) - 1)$$

Des nombreux articles, en particuliers ceux de Lorenzini et Vistoli, ont tous montré que $\rho(f,g)$ est borné par $N^2 - 1$. Quelques années avant, Ruppert avait prouvé que $|\sigma(f,g)| \leq N^2 - 1$. Des questions moins générales avait aussi été étudiées : par exemple, Stein prouva que $\rho(f,1) \leq N - 1$, résultat qui fut développé et généralisé par la suite ([Bod08]). Ces inégalités ont été prouvées aussi dans les cas de caractéristique arbitraire ou encore avec des corps qui ne sont pas algébriquement clos. Cependant, on ne sait pas encore si toutes ces bornes sont optimales.

Le but de ce mémoire est d'étudier l'ordre total de réductibilité en comptant les multiplicités $m(\mu : \lambda)$ définies pour $(\mu : \lambda) \in \sigma(f,g)$ par

$$m(\mu : \lambda) = \sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} e_{(\mu:\lambda),i}$$

et de chercher si l'inégalité est optimale dans ce cas. On commencera par montrer que si r est non-composée alors $\sigma(f,g)$ est fini, en utilisant un

théorème classique de Bertini-Krull. Puis nous étudierons les applications linéaires de Gao et de Ruppert. Un calcul sur le rang des matrices associées à ces applications linéaires permettra d'obtenir plus facilement l'inégalité connue $\rho(f,g) \leq N^2 - 1$.
Plus précisément, on sera capable de borner l'ordre total de réductibilité avec multiplicités de la fonction rationnelle r défini par

$$m(f,g) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} (m(\mu:\lambda) - 1)$$

Le principal résultat sera que la borne $N^2 - 1$ de $\rho(f,g)$ est aussi une borne supérieure pour $m(f,g)$, ainsi que pour une quantité plus grande qui tient aussi compte des multiplicité des facteurs des éléments réductibles du pinceau. Et en remarquant qu'on a toujours $0 \leq \rho(f,g) \leq m(f,g)$, on aura comme conséquence que $N^2 - 1$ borne supérieurement $\rho(f,g)$.

2 Fonction rationnelle composée

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et soit $x = (x_1, ..., x_n), n \geq 2$.

Théorème 1 (Bertini-Krull)**.** *Soit $F(x,\lambda) = p(x) - \lambda q(x) \in \mathbb{K}[x,\lambda]$ un polynôme irréductible. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$F(x,\lambda_0) \in \mathbb{K}[x]$ est réductible pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $deg_x F(x,\lambda_0) = deg_x F$*
2. *il existe $\phi, \psi \in \mathbb{K}[x]$ avec $deg_x F > max(deg\ \phi, deg\ \psi)$, et $a_i \in \mathbb{K}[\lambda]$ tel que*

$$F(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\lambda)\phi(x)^{n-i}\psi(x)^i$$

Démonstration. Pour une preuve de ce théorème voir [Sch00], théorème 37, page 217. □

Théorème 2. *Soit $r = f/g \in \mathbb{K}(x)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *r est composée*
2. *$\mu f - \lambda g$ est réductible dans $\mathbb{K}$ pour tout $(\mu:\lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tel que $deg(\mu f - \lambda g) = deg(r)$*
3. *$\mu f - \lambda g$ est réductible dans $\mathbb{K}$ pour une infinité de $(\mu:\lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$*

Démonstration. Nous suivrons ici une preuve proposée par Bodin [Bod08]. (2) $\Rightarrow$ (3) est trivial.

(1) $\Rightarrow$ (2) : soit $r = f/g$ une fonction rationnelle composée. Il existe alors $h = p/q \in \mathbb{K}(x)$ et $u \in \mathbb{K}(t)$ avec $k = deg(u) \geq 2$ tels que $r = u \circ h$. Ecrivons $u = a/b$. Soit $(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tel que $deg(\mu a - \lambda b) = deg(u)$ et factorisons $\mu a(t) - \lambda b(t) = \alpha(t - t_1)(t - t_2)...(t - t_k)$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $t_1, t_2, ..., t_k \in \mathbb{K}$. On a alors que

$$\mu f - \lambda g = g(\mu r - \lambda) = g(\frac{\mu a - \lambda b}{b})(h) = \alpha g \frac{(h - t_1)...(h - t_k)}{b(h)}$$

En multipliant par q^k, on obtient

$$(\mu f - \lambda g)(q^k b(h)) = \alpha g(p - t_1 q)...(p - t_k q)$$

Donc $p - t_1 q, ..., p - t_k q$ divisent $\mu f - \lambda g$ et $\mu f - \lambda g$ est réductible dans $\mathbb{K}[x]$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons que $\mu_0 f - \lambda_0 g$ est réductible dans $\mathbb{K}[x]$ pour une infinité de $(\mu_0 : \lambda_0) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Pour $\mu_0 \neq 0$, on pose $\delta_0 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} \in \mathbb{K}$. Alors ce pinceau est réductible pour tout $\delta_0 \in \mathbb{K}$ tel que $\deg_x F(x, \ \delta_0) = deg_x F$ (voir le corollaire 3 du théorème 32 de [Sch00]). Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Bertini-Krull : $F(x, \delta) = f(x) - \delta g(x)$ peut s'écrire

$$f(x) - \delta g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\delta)\phi(x)^{n-i}\psi(x)^i$$

Nous pouvons supposer que pour $i = 1, ...n$, le degré de a_i en δ est 1, et on peut écrire $a_i(\delta) = \alpha_i - \delta\beta_i, \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$. Alors

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi(x)^{n-i}\psi(x)^i = \phi^n \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\frac{\psi}{\phi})^i(x)$$

et

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \phi(x)^{n-i}\psi(x)^i = \phi^n \sum_{i=0}^{n} \beta_i (\frac{\psi}{\phi})^i(x)$$

On pose $h(x) = \dfrac{\psi(x)}{\phi(x)} \in \mathbb{K}(x)$, et $u(t) = \dfrac{\sum_{i=0}^n \alpha_i t^i}{\sum_{i=0}^n \beta_i t^i}$ alors $f/g = u \circ h$. De plus, $deg_x F > max(deg\phi, deg\psi)$ implique $n \geq 2$ donc que $deg(u) \geq 2$. Alors $\dfrac{f}{g} = r = u \circ h$ est une fonction rationnelle composée. $\square$

Corollaire 3. *r est non-composée si et seulement si son spectre $\sigma(f, g)$ est fini.*

Corollaire 4. *Soit $f \in \mathbb{K}[x]$ irréductible. Soit $g \in \mathbb{K}[x]$ avec $deg(g) < deg(f)$ et $pgcd(f,g) = 1$. Alors pour presque tout $(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (sauf un nombre fini), $\mu f - \lambda g$ est irréductible dans $\mathbb{K}[x]$.*

A partir de maintenant, nous considérerons que la fonction rationnelle $r = f/g$ est non composée. Son spectre $\sigma(f,g)$ est donc fini et, de manière équivalente, le pinceau de courbes projectives $\mu f + \lambda g = 0$, $(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, possède un élément général irréductible.

3 Application de Ruppert

Nous allons nous inspirer de la méthode de Ruppert (cf. [Rup86] ou [Sch00] page 204 pour une traduction en anglais), qui relie la réductibilité d'une courbe avec le premier groupe de cohomologie de De Rham du complémentaire de cette courbe. Gao a d'ailleurs déjà utilisé cette approche pour établir un algorithme de factorisation des polynômes à deux variables [Gao03].

Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$ et soit $f(X,Y) \in \mathbb{K}[X,Y]$ un polynôme de degré $N \leq \nu$. Définissons l'application $\mathbb{K}$-linéaire de Gao, par

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\nu(f) : \mathbb{K}[X,Y]_{\leq \nu-1} \times \mathbb{K}[X,Y]_{\leq \nu-1} &\to \mathbb{K}[X,Y]_{\leq N+\nu-2} \\
(G,H) &\mapsto f^2 \left(\partial_Y \left(\frac{G}{f} \right) - \partial_X \left(\frac{H}{f} \right) \right) \\
&= \begin{vmatrix} f & \partial_Y f \\ G & \partial_Y G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f & \partial_X f \\ H & \partial_X H \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Dans [Gao], f est un polynôme sans facteurs multiples, et on démontre dans ce cas que $ker\mathcal{G}_N(f)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension le nombre de facteurs de f. De plus, Gao démontre que si $f = \prod_{i=1}^r f_i$,

$$\left\{ \left(\frac{f}{f_i} \partial_X f_i, \frac{f}{f_i} \partial_Y f_i, \right) \right\}$$

est une base de $ker\mathcal{G}_N(f)$. Mais pour étudier le cas général où $f \in \mathbb{K}[X,Y]$ et $\nu \geq N$ sont arbitraires, nous devons interpréter le noyau de cette application en terme de cohomologie de De Rahm.

3.1 Cohomologie de De Rahm du complémentaire d'une courbe

Pour $f \in \mathbb{K}[X,Y]$, notons $\mathcal{C}$ la courbe algébrique définie par $f = 0$.

3.1.1 Fonctions régulières sur le complémentaire d'une courbe

Nous cherchons d'abord à définir l'ensemble des fonctions régulières sur $\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}$ le complémentaire de l'ensemble des zéros de f, c'est-à-dire que nous cherchons à définir $\Gamma(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$ (inspirée de [Per95] pour la description en terme de faisceau).

$\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}$ étant l'ensemble des points où la fonction f ne s'annule pas, on peut inclure $1/f$ parmi les sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$ sur $\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}$. Plus précisément, considérons l'homomorphisme de restriction $r : \mathbb{K}[X, Y] \to \mathcal{F}(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}, \mathbb{K})$ où $\mathcal{F}(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}, \mathbb{K})$ est l'anneau de toutes les fonctions régulières de $\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}$ dans $\mathbb{K}$. Comme $r(f)$ est inversible, r se factorise en $r = \rho j$ par le localisé $\mathbb{K}[X, Y]_f = \{g/f^s \in \mathbb{K}(X, Y) | g \in \mathbb{K}[X, Y], s \in \mathbb{N}\}$, c'est-à-dire avec l'injection canonique $j : \mathbb{K}[X, Y] \to \mathbb{K}[X, Y]_f$ et l'homomorphisme $\rho : \mathbb{K}[X, Y]_f \to \mathcal{F}(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}, \mathbb{K})$. De plus, ρ est aussi injectif. En effet, si $\rho(g/f^s) = 0$, on a $g = 0$ sur $\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}$, donc $fg = 0$ sur $\mathbb{A}^2$ ce qui signifie que $g/f^s = 0$ dans le localisé $(g/f^s \sim 0/f)$. Il est donc naturel de poser $\Gamma(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}) = \mathbb{K}[X, Y]_f$.

On peut vérifier que c'est bien un faisceau d'anneaux. Comme nous n'avons pas besoin de la notion de faisceau pour la suite, les vérifications seront succinctes et limitées à la condition de restriction. Pour la condition de recollement voir [Per95]. Prenons un autre polynôme $h \in \mathbb{K}[X, Y]$ et notons $\mathcal{C}'$ la courbe algébrique définie par $h = 0$. Si on a $\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}'$, alors $V(h) \subset V(f)$. Donc f est nulle sur $V(h)$ et par le Nullstellensatz on a $f^s = hv$. Si on a $u/h^i \in \mathbb{K}[X, Y]_h$, sa restriction à $\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}$ s'écrit $uv^i/h^i v^i = uh^i/f^{ni}$ et cette restriction est bien dans $\mathbb{K}[X, Y]_f$.

3.1.2 Construction du Complexe de De Rahm

Définition . *Un complexe de cochaines est la donnée d'une suite de groupes abéliens M^i et d'une famille d'homomorphismes, appelés opérateurs de cobord $\partial^i : M^i \to M^{i+1}$, tels que : $\partial^i \partial^{i-1} = 0$.*

Ici, nous considérons le complexe de De Rham de $\mathbb{K}[X, Y]_f$. C'est-à-dire que les groupes abéliens sont les $\Omega^i(\mathbb{K}[X, Y]_f)$ ensembles des i-formes différentielles sur $\mathbb{K}[X, Y]_f$. Et les opérateurs de cobord sont les opérateurs de différentiation extérieure $d^i : \Omega^i(\mathbb{K}[X, Y]_f) \to \Omega^{i+1}(\mathbb{K}[X, Y]_f)$ qui associe à la i-forme différentielle ω sa dérivée extérieure $d\omega$, $(i + 1)$-forme différentielle. On a bien pour tout i la relation $d^i \circ d^{i-1} = 0$ (voir l'annexe A). Le complexe est donc :

$$\Omega^\bullet(\mathbb{K}[X, Y]_f) : 0 \to \mathbb{K}[X, Y]_f \to \Omega^1(\mathbb{K}[X, Y]_f) \to \Omega^2(\mathbb{K}[X, Y]_f) \to ...$$

Définition . *Soit* $\omega \in \Omega^i$. *Lorsque* $d\omega = 0$, *on dit que la forme différentielle* ω *est fermée. Lorsqu'il existe* $\alpha \in \Omega^{i-1}$ *telle que* $\omega = d\alpha$, *on dit que la forme différentielle* ω *est exacte. On définit le* i*-ème groupe de cohomologie de De Rham* $H^i_\Omega(\Omega^\bullet(\mathbb{K}[X,Y]_f))$ *comme étant l'espace quotient des* i*-formes fermées sur les* i*-formes exactes.*

Par le théorème de De Rham, les groupes de cohomologie de De Rham sont isomorphes aux groupes de cohomologie de l'espace topologique sous-jacent :

$$H^i(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C}) \simeq H^i_\Omega(\Omega^\bullet(\mathbb{K}[X,Y]_f)) = \mathrm{ker} d^i / \mathrm{im} d^{i-1}$$

On peut démontrer le théorème suivant (preuve adaptée au cas affine dans [Sch07], voir aussi [Dim92])

Théorème 5. *Soit* $f = \prod_{i=1}^{n} f_i^{e_i}$ *la décomposition de* f *en facteurs absolument irréductibles. Alors les*

$$\frac{df_1}{f_1}, \ldots, \frac{df_n}{f_n}$$

induisent une base du $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $H^1(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C})$.

En particulier, la dimension de $H^1(\mathbb{A}^2 \backslash \mathcal{C})$ est égale au nombre de facteurs absolument irréductibles de f. Et comme on a :

$$\frac{df_i}{f_i} = \frac{1}{f}\left(\frac{f}{f_i}\partial_X(f_i)dX + \frac{f}{f_i}\partial_Y(f_i)dY\right)$$

le théorème montre aussi que cet espace possède une base induite par des formes différentielles avec f en dénominateur et un numérateur de degré inférieur au degré de f.

3.2 Retour à l'application de Gao

3.2.1 $\mathrm{ker}\mathcal{G}_\nu(f)$ en termes de formes différentielles

Par définition de $\mathcal{G}_\nu(f)$, un couple $(G,H) \in \mathbb{K}[X,Y]_{\leq \nu-1} \times \mathbb{K}[X,Y]_{\leq \nu-1}$ est inclu dans le noyau de $\mathcal{G}_\nu(f)$ si et seulement si la 1-forme $\frac{1}{f}(GdX + HdY)$

est fermée. En effet, on a

$$\begin{aligned}
& d\left(\frac{G}{f}dX+\frac{H}{f}dY\right) \\
&= d\left(\frac{G}{f}\right)\wedge dX + d\left(\frac{H}{f}\right)\wedge dY \\
&= \left(\partial_X\left(\frac{G}{f}\right)dX+\partial_Y\left(\frac{G}{f}\right)dY\right)\wedge dX + \left(\partial_X\left(\frac{H}{f}\right)dX+\partial_Y\left(\frac{H}{f}\right)dY\right)\wedge dY \\
&= \left(\partial_Y\left(\frac{G}{f}\right)-\partial_X\left(\frac{H}{f}\right)\right)dY\wedge dX
\end{aligned}$$

Donc, $\partial_Y\left(\frac{G}{f}\right)-\partial_X\left(\frac{H}{f}\right) = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{G}{f}dX+\frac{H}{f}dY\right) = 0$. On peut donc mettre en correspondance $\ker\mathcal{G}_\nu(f)$ avec

$$\Big\{\omega = \frac{1}{f}(GdX+HdY) \text{ telles que } d\omega = 0, \omega\in\Omega^1(\mathbb{K}[X,Y]_f), \\ (G,H)\in\mathbb{K}[X,Y]_{\leq\nu-1}\times\mathbb{K}[X,Y]_{\leq\nu-1}\}$$

En utilisant la remarque du théorème précédent, on a que l'application $\ker\ \mathcal{G}_\nu(f) \to H^1(\mathbb{A}^2\backslash\mathcal{C})$ est surjective. Il s'en suit que $H^1(\mathbb{A}^2\backslash\mathcal{C}) \simeq \ker\ \mathcal{G}_\nu(f)/\mathcal{B}_\nu$ où $\mathcal{B}_\nu$ est l'ensemble des 1-formes exactes de $\ker\ \mathcal{G}_\nu(f)$.

Gao a montré [Gao03], dans le cas où f est un polynôme sans facteur multiple, que $\dim_{\mathbb{K}}H^1(\mathbb{A}^2\backslash\mathcal{C}) = \dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{G}_N(f)$. Cependant dans le cas général, nous devons tenir compte de l'ensemble $\mathcal{B}_\nu$ des formes exactes de $\ker\ \mathcal{G}_\nu(f)$, comme le montre l'exemple de [Scheiblechner] : supposons que $f = g^2$ avec $g\in\mathbb{K}[X,Y]$ irréductible. Alors la forme fermée $\omega = \frac{dg}{g^2} = \frac{1}{f}\left(\partial_X(g)dX+\partial_Y(g)dY\right)$ est dans $\ker\ \mathcal{G}_\nu(f)$, mais comme $\omega = d\left(\frac{-1}{g}\right)$ est exacte, sa classe dans le groupe de cohomologie H^1 est zéro.

Nous devons donc caractériser cet ensemble $\mathcal{B}_\nu$. On sait juste pour l'instant que les éléments de $\mathcal{B}_\nu$ sont de la forme $d\left(\frac{P}{f^s}\right)$ pour un $P\in\mathbb{K}[X,Y]$ et $s\in\mathbb{N}$ (car $\Omega^0 = \mathbb{K}[X,Y]_f$). Mais nous allons montrer qu'en faite s=1. C'est-à-dire que

$$\mathcal{B}_\nu = \left\{\omega\in\ker\mathcal{G}_\nu(f) \text{ telles que } \exists P\in\mathbb{K}[X,Y]_{\leq\nu} \text{ avec } d\left(\frac{P}{f}\right) = \omega\right\}$$

Lemme 6. *Soient $p,q\in\mathbb{K}[X,Y]$ tels que p divise qdp. Alors tout facteur irréductible de p divise q.*

Démonstration. Soit $p = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ la décomposition de p en facteurs irréductibles. On a alors $\frac{dp}{p} = \sum_{i=1}^{r} e_i \frac{dp_i}{p_i}$. En supposant que $p_i^{e_i}$ divise $qdp = q \sum_{j=1}^{r} e_j \frac{p}{p_j} dp_j$, on obtient que $p_i^{e_i}$ doit diviser $q\frac{p}{p_i}dp_i$ et donc que p_i divise q.

□

Lemme 7. *Soit un polynôme $f \in \mathbb{K}[X,Y]$ de degré N et soient $G, H \in \mathbb{K}[X,Y]_{\leq \nu-1}$ avec $N \leq \nu - 1$. Supposons qu'on ait*

$$\frac{1}{f}(GdX + HdY) = d\left(\frac{P}{f^s}\right)$$

avec $s \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X,Y]$ tel que f ne divise pas P si $s \geq 1$. Alors ou bien $s = 1$ et $\deg(P) \leq \nu$ ou bien $s = 0$ et $\deg(P) \leq \nu - N$

Démonstration. Supposons que $s \geq 2$ et que $f = \prod_{i=1}^{r} f_i^{e_i}$ soit une décomposition en facteurs irréductibles de f. Comme

$$d\left(\frac{P}{f^s}\right) = \frac{fdP - sPdf}{f^{s+1}}$$

on a

$$fdP - sPdf = f^s(GdX + HdY)$$

Donc f^s divise $fdP - sPdf$, donc en particulier, f divise Pdf et donc, par le lemme précédent, f_i divise P pour tout $i = 1, ..., r$. De

$$\frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{r} e_i \frac{df_i}{f_i}$$

on obtient

$$fdP - sPdf = fdP - sPf\sum_{i=1}^{r} e_i \frac{df_i}{f_i} = f\left(dP - s\sum_{i=1}^{r} e_i \frac{P}{f_i} df_i\right)$$

Donc f^{s-1} divise $dP - s\sum_{i=1}^{r} e_i \frac{P}{f_i} df_i$. Soit $Q := \text{pgcd}(f, P) = \prod_{i=1}^{r} f_i^{\mu_i}$ avec $1 \leq \mu_i \leq e_i$ pour tout $i = 1, ..., r$ et soit $R := P/Q$. Comme $s \geq 2$, on obtient que f divise

$$
\begin{aligned}
d(P) - s\sum_{i=1}^{r} e_i \frac{P}{f_i} df_i &= d(RQ) - s\sum_{i=1}^{r} e_i \frac{P}{f_i} df_i \\
&= QdR + RdQ - s\sum_{i=1}^{r} e_i \frac{P}{f_i} df_i \\
&= \left(\prod_{i=1}^{r} f_i^{\mu_i}\right) dR + s\sum_{i=1}^{r} (\mu_i - se_i) R\frac{Q}{f_i} df_i
\end{aligned}
$$

et que $\mu_i - se_i < 0$ pour tout i et donc $f_i^{\mu_i}$ divise $R\frac{Q}{f_i}df_i = Rf_i^{\mu_i - 1}\prod_{j\neq i} f_j^{\mu_j} df_i$. Comme $1 \leq \mu_i$, on a en particulier que f_i divise Rdf_i et donc que f_i divise $R = P/\prod_{i=1}^{r} f_i^{\mu_i}$ par le lemme 1. Mais alors $f_i^{\mu+1}$ divise P ce qui implique que $\mu_i = e_i$ pour tout i et $f = Q = \mathrm{pgcd}(f, P)$. Il y a donc contradiction avec nos hypothèses puisque f divise P. Donc on doit avoir $0 \leq s \leq 1$

Supposons maintenant que $s = 0$. Alors

$$GdX + HdY = fdP = f\partial_X PdX + f\partial_Y PdY$$

et donc on a

$$G = f\partial_X P, \text{ et } H = f\partial_Y P$$

d'où

$$\deg(f\partial_X P) \leq \nu - 1 \text{ et } \deg(f\partial_Y P) =\leq \nu - 1$$

Donc $\deg(P) \leq \nu - N$.

Supposons que $s = 1$. Alors

$$fGdX + fHdY = fdP - Pdf = (f\partial_X P - P\partial_X f)dX + (f\partial_Y P - P\partial_Y f)dY$$

Soit δ le degré de P, et soient $P = P_0 + P_1 + ... + P_\delta$, $f = f_0 + ... + f_N$ les décompositions de P et f en parties homogènes. Si $(f_N\partial_X P_\delta - P_\delta\partial_X f_N) \neq 0$ ou $(f_N\partial_Y P_\delta - P_\delta\partial_Y f_N) \neq 0$, alors nécessairement $\delta \leq \nu$ car $N + \delta - 1 = \deg(f_N\partial_X P_\delta - P_\delta\partial_X f_N) \leq \deg(fG) \leq \nu + N - 1$ et $N + \delta - 1 = \deg(f_N\partial_Y P_\delta - P_\delta\partial_Y f_N) \leq \deg(fH) \leq \nu + N - 1$. Dans le cas contraire, on obtient que

$$d\left(\frac{P_\delta}{f_N}\right) = \frac{f_N dP_\delta - P_\delta df_N}{(f_N)^2} = 0$$

donc $\dfrac{P_\delta}{f_N} \in \mathbb{K}$ et $\delta = N \leq \nu$. $\square$

3.2.2 Calcul de la dimension de $\ker\mathcal{G}_\nu(f)$

Maintenant que nous avons bien caractérisé l'ensemble $\mathcal{B}_\nu$, nous pouvons commencer le calcul de la dimension du noyau de l'application linéaire $\mathcal{G}_\nu(f)$ pour $\nu \geq N$. En effet, d'après l'interprétation précédente de $\ker\mathcal{G}_\nu(f)$ en termes de 1-formes différentielles, nous avons

$$\dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{G}_\nu(f) = \dim_{\mathbb{K}} H^1(\mathbb{A}^2\backslash\mathcal{C}) + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{B}_\nu$$

Mais nous savons déjà que $\dim_{\mathbb{K}} H^1(\mathbb{A}^2\backslash\mathcal{C}) = r$. Il nous reste donc à calculer $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{B}_\nu$.

Proposition 8. *Soit $f(X,Y) \in \mathbb{K}[X,Y]$ de degré N tel que $f = \prod_{i=1}^{r} f_i^{e_i}$ soit une factorisation de f où f_i sont des facteurs irréductibles de degrés d_i. Alors, pour $\nu \geq N$, on a*

$$\dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{G}_\nu(f) = r - 1 + \binom{2+\nu-N+\sum_{i=1}^{r} d_i(e_i-1)}{2}$$

Remarque . *On a donc ici une généralisation du résultat de Gao. En effet, pour $\nu = N$ et pour f sans facteurs multiples (c'est-à-dire $e_i = 1$ pour tout $i = 1..r$), on retrouve alors $\dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{G}_N(f) = r$.*

Démonstration. Observons que la condition $d(\frac{P}{f}) = \omega$ dans la définition de $\mathcal{B}_\nu$ est équivalente au système d'équations

$$\begin{cases} f\partial_X P - P\partial_X f - Gf = 0 \\ f\partial_Y P - P\partial_Y f - Hf = 0 \end{cases}$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} \deg(G) \leq \nu - 1 \\ \deg(G) \leq \nu - 1 \\ \deg(P) \leq \nu \end{cases}$$

Notons $\mathcal{L}_\nu$ l'espace vectoriel des (G,H,P) solutions de ce système et posons

$$\begin{array}{rcl} \rho_\nu : \mathcal{L}_\nu & \rightarrow & \mathcal{B}_\nu \\ (G,H,P) & \mapsto & (G,H) \end{array}$$

la projection canonique de $\mathcal{L}_\nu$ sur $\mathcal{B}_\nu$. Le noyau de ρ_ν est

$$\ker\rho_\nu = \{(0,0,P) \mid d(P/f) = 0\} = \{(0,0,P) \mid P = \lambda f \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Donc $\dim_{\mathbb{K}} \ker \rho_\nu = 1$. Et, par le théorème du rang, on obtient

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{B}_\nu = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_\nu - 1$$

Nous sommes donc ramené à calculer la dimension de $\mathcal{L}_\nu$.

La première équation définissant $\mathcal{L}_\nu$, qui peut être réécrite $P \partial_X f = f(\partial_X P - G)$, implique

$$P = \frac{f}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)} \times \frac{\partial_X P - G}{\mathrm{pgcd}(\partial_X P - G, \partial_X f)} = \frac{f}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)} Q_1$$

Q_1 est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $\nu - N + \deg \mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)$. De la même manière, la seconde équation montre que P doit être de la forme $Q_2 f / \mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)$ où Q_2 est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\nu - N + \deg \mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)$.

On obtient donc une solution au système d'équation définissant $\mathcal{L}_\nu$ en résolvant l'équation

$$Q_2 \mathrm{pgcd}(f, \partial_X f) = Q_1 \mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)$$

En appliquant la même méthode que précédemment, on trouve

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{Q_2}{\mathrm{pgcd}(Q_2, \mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f))} \times \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)}{\mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f), pgcd(f, \partial_Y f))} \\
&= \mathrm{pgcd}(Q_1, Q_2) \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f)} \\
&= Q \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \frac{Q_1}{\mathrm{pgcd}(Q_1, \mathrm{pgcd}(f, \partial_X f))} \times \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)}{\mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f), pgcd(f, \partial_X f))} \\
&= \mathrm{pgcd}(Q_1, Q_2) \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f)} \\
&= Q \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f)}
\end{aligned}$$

où

$$Q = \mathrm{pgcd}(Q_1, Q_2) = Q_1 \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f)}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f)} = Q_2 \frac{\mathrm{pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f)}{\mathrm{pgcd}(f, \partial_Y f)}$$

Donc Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X, Y]$ de degré

$$\begin{aligned} \deg(Q) &= \deg(Q_1) + \deg \text{ pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f) - \deg \text{ pgcd}(f, \partial_X f) \\ &\leq \nu - N + \deg \text{ pgcd}(f, \partial_X f, \partial_Y f) \\ &\leq \nu - N + \sum_{i=1}^{r} d_i(e_i - 1) \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'une fois P fixé, on obtient une unique solution (G, H, P) du système définissant $\mathcal{L}_\nu$. On en déduit que la dimension de $\mathcal{L}_\nu$ est égale à la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à la quantité précédente, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_\nu$ est de dimension

$$\binom{2 + \nu - N + \sum_{i=1}^{r} d_i(e_i - 1)}{2}$$

et la formule annoncée est prouvée.

$\square$

3.3 Introduction de l'application de Ruppert

Nous allons introduire une nouvelle application $\mathbb{K}$-linéaire similaire à $\mathcal{G}_\nu(f)$ mais avec un espace de départ de dimension plus petite. Cette restriction de $\mathcal{G}_\nu(f)$ peut être vue comme un "passage au quotient" et permettra par la suite de définir l'application de Ruppert sur des espaces projectifs.

Soit E_ν le $\mathbb{K}$-espace vectoriel défini par

$$E_\nu = \{(G, H) \in \mathbb{K}[X, Y]_{\leq \nu - 1} \times \mathbb{K}[X, Y]_{\leq \nu - 1} \mid \deg(XG + YH) \leq \nu - 1\}$$

E_ν est de dimension $\nu^2 - 1$. En effet, $\mathbb{K}[X, Y]_{\leq \nu - 1} \times \mathbb{K}[X, Y]_{\leq \nu - 1}$ est de dimension $\nu^2 + \nu$ et la condition $\deg(XG + YH) \leq \nu - 1$ donne un système de $\nu + 1$ équations linéairement indépendantes.

De plus, E_ν a la propriété suivante :

Lemme 9. *Soit $f \in \mathbb{K}[X, Y]$ de degré N. Alors, pour tout entier positif ν et pour tout $(G, H) \in E_\nu$, on a*

$$\deg f^2 \left(\partial_Y \left(\frac{G}{f} \right) - \partial_X \left(\frac{H}{f} \right) \right) \leq \nu + N - 3$$

Démonstration. Notons par $G_{\nu-1}$ (resp. $H_{\nu-1}$, f_N), la partie homogène de degré $\nu - 1$ de G (resp. de degré $\nu - 1$ de H, de degré N de f_N). Nous avons alors

$$\begin{aligned}
& f_N^2 d\left(\frac{XG_{\nu-1}+YH_{\nu-1}}{f_N}\right) \\
& = \quad f_N d\left(XG_{\nu-1}+YH_{\nu-1}\right)-\left(XG_{\nu-1}+YH_{\nu-1}\right) df_N \\
& = \quad f_N\left(G_{\nu-1}+X\partial_X G_{\nu-1}+Y\partial_X H_{\nu-1}\right) dX \\
& \quad\quad +f_N\left(X\partial_Y G_{\nu-1}+H_{\nu-1}+Y\partial_Y H_{\nu-1}\right) dX \\
& \quad\quad -\left(XG_{\nu-1}\partial_X f_N+YH_{\nu-1}\partial_X f_N\right) dX \\
& \quad\quad -\left(XG_{\nu-1}\partial_Y f_N+YH_{\nu-1}\partial_Y f_N\right) dY
\end{aligned}$$

En utilisant la relation d'Euler, $df_N = X\partial_X f_N + Y\partial_Y f_N$ et en utilisant la relation $(\nu-1)G_{\nu-1} = X\partial_X G_{\nu-1} + Y\partial_Y G_{\nu-1}$, on obtient que le coefficient de dX est

$$\begin{aligned}
& f_N\left(\nu G_{\nu-1}-Y\partial_Y G_{\nu-1}+Y\partial_X H_{\nu-1}\right)-G_{\nu-1}\left(df_N-Y\partial_Y f_N\right)-YH_{\nu-1}\partial_X f_N \\
& \qquad = (\nu-N)f_N G_{\nu-1}-Yf_N^2\left(\partial_Y\left(\frac{G_{\nu-1}}{f_N}\right)-\partial_X\left(\frac{H_{\nu-1}}{f_N}\right)\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

De même le coefficient de dY est

$$(\nu-N)f_N H_{\nu-1}-Xf_N^2\left(\partial_Y\left(\frac{G_{\nu-1}}{f_N}\right)-\partial_X\left(\frac{H_{\nu-1}}{f_N}\right)\right) \qquad (2)$$

Mais comme $(G,H)\in E_\nu$, on a $XG_{\nu-1}+YH_{\nu-1}=0$ et les coefficients précédents sont donc nuls. Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
& 0 = X(1)+Y(2) \\
& = \quad (\nu-N)f_N(XG_{\nu-1}+YH_{\nu-1})-2XYf_N^2\left(\partial_Y\left(\frac{G_{\nu-1}}{f_N}\right)-\partial_X\left(\frac{H_{\nu-1}}{f_N}\right)\right) \\
& = \quad -2XYf_N^2\left(\partial_Y\left(\frac{G_{\nu-1}}{f_N}\right)-\partial_X\left(\frac{H_{\nu-1}}{f_N}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc $f_N^2\left(\partial_Y\left(\frac{G_{\nu-1}}{f_N}\right)-\partial_X\left(\frac{H_{\nu-1}}{f_N}\right)\right)=0$ et le lemme est prouvé. □

Nous pouvons maintenant définir l'application de Ruppert $\mathcal{R}_\nu(f)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\nu(f): E_\nu & \rightarrow \mathbb{K}[X,Y]_{\leq N+\nu-3} \\
(G,H) & \mapsto f^2\left(\partial_Y\left(\frac{G}{f}\right)-\partial_X\left(\frac{H}{f}\right)\right)
\end{aligned}$$

avec $f\in\mathbb{K}[X,Y]$ de degré N et $\nu\geq N$. On peut remarquer au passage que $\mathcal{R}_\nu$ est $\mathbb{K}$-linéaire, tout comme $\mathcal{G}_\nu$.

3.3.1 Calcul de la dimension de son noyau

Proposition 10. *Soit $f \in \mathbb{K}[X,Y]$ de degré N. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}_N(f) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{G}_N(f) - 1$$

et pour $\nu > N$,

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}_\nu(f) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{G}_{\nu-1}(f)$$

Démonstration. En reprenant les notations et les calculs du lemme précédent, on peut remarquer que pour tout entier $\nu \geq N$, et pour tout $(G,H) \in \ker \mathcal{G}_\nu(f)$, on a

$$d\left(\frac{XG_{\nu-1} + YH_{\nu-1}}{f_N}\right) = (\nu - N)\frac{G_{\nu-1}dX + H_{\nu-1}dY}{f_N} \tag{3}$$

Maintenant, prenons une factorisation $f = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$ de f où f_i est un polynôme irréductible de degré d_i. Par définition de $\mathcal{G}_N(f)$ et $\mathcal{R}_N(f)$, tout élément dans le noyau de $\mathcal{R}_N(f)$ est aussi dans le noyau de $\mathcal{G}_N(f)$. D'un autre côté, on peut vérifier que

$$\left(\frac{f}{f_1}\partial_X f_1, \frac{f}{f_1}\partial_Y f_1\right) \in \ker \mathcal{G}_N(f)$$

mais n'appartient pas au noyau de $\mathcal{R}_N(f)$ car

$$X\frac{f}{f_1}\partial_X f_1 + Y\frac{f}{f_1}\partial_Y f_1 = \frac{f}{f_1}(X\partial_X f_1 + Y\partial_Y f_1) = d_1 f + \frac{f}{f_1}\tilde{f}_1$$

où $\deg(\tilde{f}_1) < d_1$ par la relation d'Euler. Cependant, pour tout couple $(G,H) \in \ker \mathcal{G}_N(f)$, l'équation (3) montre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$XG_{N-1} + YH_{N-1} = \alpha f_N$$

car

$$\nu = N \Rightarrow d\left(\frac{XG_{\nu-1} + YH_{\nu-1}}{f_N}\right) = 0 \Rightarrow \frac{XG_{\nu-1} + YH_{\nu-1}}{f_N} \in \mathbb{K}$$

Il s'en suit que

$$(G,H) - \frac{\alpha}{d_1}\left(\frac{f}{f_1}\partial_X f_1, \frac{f}{f_1}\partial_Y f_1\right) \in \ker \mathcal{R}_N(f)$$

et donc que

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}_N(f) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{G}_N(f) - 1$$

Pour la dernière partie de la preuve, prenons un entier $\nu > N$. Par définition de $\mathcal{G}_\nu(f)$ et de $\mathcal{R}_\nu(f)$, on a

$$\ker\mathcal{G}_{\nu-1}(f) \subseteq \ker\mathcal{R}_\nu(f) \subseteq \ker\mathcal{G}_\nu(f)$$

Prenons un couple $(G, H) \in \ker\mathcal{R}_\nu(f)$. Alors $XG_{\nu-1} + YH_{\nu-1} = 0$ et en utilisant (3) on déduit que

$$\frac{G_{\nu-1}dX + H_{\nu-1}dY}{f_N} = 0$$

c'est-à-dire $G_{\nu-1} = 0$ et $H_{\nu-1} = 0$ et donc $(G, H) \in \ker\mathcal{G}_{\nu-1}(f)$

$\square$

Corollaire 11. *Soit $f \in \mathbb{K}[X, Y]$ de degré N tel que $f = \prod_{i=1}^{r} f_i^{e_i}$ soit une factorisation de f où chaque f_i est irréductible de degré d_i. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{R}_N(f) = r - 2 + \binom{2 + \sum_{i=1}^{r} d_i(e_i - 1)}{2}$$

En particulier, f est irréductible si et seulement si $\dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{R}_N(f) = 0$.

Remarque . *On a déjà donné une base du noyau de $\mathcal{G}_N(f)$ dans le cas où f est sans facteurs multiples. Sous les mêmes hypothèses, on a que l'ensemble*

$$\left\{ \left(-d_i \frac{f}{f_1} \partial_X f_1 + d_1 \frac{f}{f_i} \partial_X f_i, -d_i \frac{f}{f_1} \partial_Y f_1 + d_1 \frac{f}{f_i} \partial_Y f_i \right), i = 2...r \right\}$$

forme une base de $\ker\mathcal{R}_N(f)$.

3.3.2 Application de Ruppert homogène

Les résultats précédents permettent de définir la matrice de Ruppert dans un cadre homogène. Pour cela, définissons l'application de Ruppert homogène : soit $f(X, Y, Z) \in \mathbb{K}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène de degré N et posons

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}(f) : E & \to & \mathbb{K}[X, Y, Z]_{2N-3} \\ (G, H) & \mapsto & \frac{1}{Z} f^2 \left(\partial_Y \left(\frac{G}{f} \right) - \partial_X \left(\frac{H}{f} \right) \right) \end{array}$$

où

$$E = \{(G, H) \in \mathbb{K}[X, Y, Z]_{N-1} \times \mathbb{K}[X, Y, Z]_{N-1} \text{ tel que } Z | XG + YH\}$$

On remarque que la condition $\deg(XG + YH) \leq \nu - 1$ dans la définition de $\mathcal{R}_\nu(f)$ se traduit ici par la condition $Z | XG + YH$ et que la division par Z dans la définition de $\mathcal{R}(f)$ est justifiée par le lemme 9.

Théorème 12. *Soit $f(X,Y,Z) \in \mathbb{K}[X,Y,Z]$ un polynôme homogène de degré N et supposons que $f = \prod_{i=1}^{r} f_i^{e_i}$ où chaque polynôme f_i est irréductible et homogène de degré d_i. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}(f) = r - 2 + \binom{2 + \sum_{i=1}^{r} d_i(e_i - 1)}{2}$$

En particulier, f est irréductible si et seulement si $\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}(f) = 0$.

Démonstration. Notons $\tilde{f}(X,Y) = f(X,Y,1) \in \mathbb{K}[X,Y]$ le deshomogénéisé de f et considérons l'application $\mathcal{R}_N(\tilde{f})$. Nous affirmons que les noyaux de $\mathcal{R}_N(\tilde{f})$ et de $\mathcal{R}(f)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes.

En effet, soit $(\tilde{G}(X,Y), \tilde{H}(X,Y)) \in \ker \mathcal{R}_N(\tilde{f})$ et soient G et H les homogénéisés de degré $N-1$ de $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$ respectivement. C'est-à-dire que

$$G(X,Y,Z) = Z^{N-1}\tilde{G}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \; H(X,Y,Z) = Z^{N-1}\tilde{H}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{R}_N(\tilde{f}) & \left(\tilde{G}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \tilde{H}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\right) \\ = \; & \tilde{f}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \partial_Y \tilde{G}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \tilde{G}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \partial_Y \tilde{f}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ & -\tilde{f}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \partial_X \tilde{H}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + \tilde{H}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \partial_X \tilde{f}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \end{aligned}$$

En multipliant par Z^{2N-2}, on obtient

$$f\partial_Y G - G\partial_Y f - f\partial_X H + H\partial_X f = Z\mathcal{R}(f)(G,H) = 0$$

Mais comme $\deg(X\tilde{G} + Y\tilde{H}) \leq N-1$, on en déduit que Z divise $XG + YH$ et donc que (G,H) est dans le noyau de $\mathcal{R}(f)$. De la même manière, si $(G,H) \in \ker \mathcal{R}(f)$ alors $(\tilde{G}, \tilde{H}) = (G(X,Y,1), H(X,Y,1)) \in \ker \mathcal{R}_N(f)$. Nous avons donc prouvé que

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}_N(\tilde{f})$$

L'égalité annoncée vient du corollaire précédent si $\deg(\tilde{f}) = N$. Autrement, si $\deg(\tilde{f}) < N$, l'égalité est une conséquence des propositions 8 et 10. $\square$

Suite à des discussions avec M.Dimca, il apparaît qu'on doit pouvoir calculer la dimension du noyau de l'application de Ruppert homogène sans utiliser l'application de Gao. Il aurait alors fallu travailler avec des formes différentielles homogènes pour construire le complexe suivant

$$\Omega^\bullet(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}) : 0 \to \Omega^0(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}) \to \Omega^1(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}) \to \Omega^2(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}) \to ...$$

Par des théorèmes principalement dûs à Grothendieck, on peut alors montrer que $H^k(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C},\mathbb{C}) = H^k(\Omega^\bullet(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}))$. On remarque d'ailleurs, que toute section $\alpha \in H^1(\Omega^\bullet(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}))$ s'écrit de la forme

$$\alpha = \frac{\omega}{f^2}$$

où ω est une 1-forme différentielle homogène, vérifiant $\Delta\omega = 0$ en particulier. Cette condition est équivalente à notre condition $Z|XG + YH$ dans la définition de E. Le calcul de la dimension du noyau de l'application de Ruppert homogène est alors obtenu grâce à la relation

$$\dim_{\mathbb{K}}\ker\mathcal{R}(f) = \dim_{\mathbb{K}} H^1(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C}) + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$$

où $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\ker\mathcal{R}(f)$ qui reste à caractériser. $\dim_{\mathbb{K}} H^1(\mathbb{P}^2\backslash\mathcal{C})$ est déjà connu [Dim92] et vaut $r-1$.

Par manque de temps, nous n'avons pas pu étudier cette méthode plus en détail, ce qui aurait ensuite pu nous amener à étudier le cas quasi-homogène.

4 Une borne pour l'ordre total de réductibilité

Soit $r = f/g \in \mathbb{K}(X,Y)$ une fonction rationnelle non-composée de degré N. Si $(\mu,\lambda) \in \sigma(f,g)$ alors on a

$$\mu f^\# + \lambda g^\# = \prod_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} P_{(\mu:\lambda),i}^{e_{(\mu:\lambda),i}}$$

où $f^\#$ et $g^\#$ sont les homogénéisés de degré N de f et g respectivement et où $P_{(\mu:\lambda),i}$ est un polynôme irréductible et homogène. On rappelle qu'on a défini l'ordre total de réductibilité de r par

$$\rho(f,g) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} (n(\mu:\lambda)-1)$$

et l'ordre total de réductibilité de r en comptant les multiplicités par

$$m(f,g) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} (m(\mu:\lambda)-1) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} e_{(\mu:\lambda),i}\right) - 1\right)$$

4.1 Une remarque autour des fibres géométriquement irréductibles

Nous allons aussi considérer la quantité

$$\omega(\mu,\lambda) = \sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} deg(P_{(\mu:\lambda),i})(e_{(\mu:\lambda),i} - 1) \geq \sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} (e_{(\mu:\lambda),i} - 1)$$

qui est le nombre de facteurs multiples pondérés par leurs multiplicités. La quantité $\omega(f,g) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \omega(\mu:\lambda)$ est particulièrement intéressante puisqu'elle apparaît pour le première fois dans les travaux de Darboux [Dar78] et de Poincaré [Poi91] sur l'étude des équations différentielles du premier ordre. En particulier, ils savaient déjà que $\omega(f,g) \leq 2N-2$ (voir [Jou83] pour une preuve). Ce résultat implique l'inégalité suivante

Lemme 13. *Posons*

$$\gamma(f,g) = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \mid \mu f^{\#} + \lambda g^{\#} = P_{(\mu:\lambda)}^{e_{(\mu:\lambda)}},\ \textit{avec}\ e_{(\mu:\lambda)} \geq 2\ \textit{et}\ P_{(\mu:\lambda)}\ \textit{irréductible}\}$$

alors on a

$$|\gamma(f,g)| \leq 3$$

C'est-à-dire que le nombre de fibres géométriquement irréductibles mais algébriquement réductibles est borné par trois.

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} \sum_{(\mu:\lambda)\in\gamma(f,g)} deg(P_{(\mu:\lambda)})(e_{(\mu:\lambda)} - 1) &\leq \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \left(\sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} deg(P_{(\mu:\lambda),i})(e_{(\mu:\lambda),i} - 1) \right) \\ &\leq 2N-2 \end{aligned}$$

Mais $N = e_{(\mu:\lambda)} \deg(P_{(\mu:\lambda)})$ et $\deg(P_{(\mu:\lambda)}) \leq N/2$ pour tout $(\mu:\lambda) \in \gamma(f,g)$, donc

$$\begin{aligned} N\,|\gamma(f,g)| &= \sum_{(\mu:\lambda)\in\gamma(f,g)} e_{(\mu:\lambda)} deg(P_{(\mu:\lambda)}) \\ &\leq 2N-2+\sum_{(\mu:\lambda)\in\gamma(f,g)} deg(P_{(\mu:\lambda)}) \\ &\leq 2N-2+\frac{N}{2}|\gamma(f,g)| \end{aligned}$$

Et comme N et $|\gamma(f,g)|$ sont des entiers, on obtient que $|\gamma(f,g)| \leq 3$

□

On peut aussi en déduire que le nombre de fibres géométriquement réductibles mais algébriquement réductibles sur l'espace affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ (c'est-à-dire juste en deux variables X et Y) est borné par quatre. En effet, dans ce cas, on compte alors les fibres du pinceau $\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}$ qui sont de la forme $Z^{e_\infty} P^e$ où P est irréductible et avec $e\,\deg(P) + e_\infty = N$. On compte donc en plus les points $(\mu, \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ où Z divise $\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}$ (c'est-à-dire que, du point de vue affine, le degré diminue). Mais il n'y a au plus qu'un seul tel point. Donc de l'inégalité $|\gamma(f,g)| \le 3$ on déduit que ces fibres sont au plus au nombre de 4. On retrouve ici, de manière élémentaire, une propriété étudiée dans [SSA03].

4.2 Une borne pour $\rho(f,g)$ et pour $m(f,g)$

Introduisons encore une notation :

$$\theta(\mu : \lambda) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \mathcal{R}(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) - m(\mu : \lambda) + 1 - \omega(\mu : \lambda)$$

donc d'après le théorème 12

$$\theta(\mu : \lambda) = \binom{\omega(\mu : \lambda) + 1}{2} - \sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} (e_{(\mu:\lambda),i} - 1)$$

et posons aussi

$$\theta(f,g) = \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \theta(\mu : \lambda)$$

Cette quantité est positive car

$$\theta(\mu : \lambda) \ge \binom{\omega(\mu : \lambda) + 1}{2} - \omega(\mu : \lambda) = \binom{\omega(\mu : \lambda)}{2}$$

Théorème 14. *Soit $r = f/g \in \mathbb{K}(X,Y)$ une fonction rationnelle réduite non-composée et soit $N = \deg(r) = \max(\deg(f), \deg(g))$. Alors, on a :*

$$0 \le \rho(f,g) \le m(f,g) + \omega(f,g) + \theta(f,g) \le N^2 - 1$$

Démonstration. Pour tout $(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, considérons l'application linéaire

$$\mathcal{R}(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) = \mu \mathcal{R}(f^{\#}) + \lambda \mathcal{R}(g^{\#})$$

et, en choisissant des bases pour les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et $\mathbb{K}[X,Y,Z]_{2N-3}$, les matrices correspondantes

$$M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) = \mu M(f^{\#}) + \lambda M(g^{\#})$$

Elles forment un pinceau de matrices à N^2-1 colonnes et $\binom{2+(2N-3)}{2}$ lignes. Pour $N>2$ il y a donc plus de lignes que de colonnes.

On définit le polynôme $Spect(U,V) \in \mathbb{K}[U,V]$ comme étant le pgcd des (N^2-1)-mineurs de la matrice

$$UM(f^{\#}) + VM(g^{\#}) \tag{4}$$

C'est un polynôme homogène de degré $\leq N^2-1$.

Notons que $Spect(U,V)$ est non nul. En effet, comme $r = f/g$ est réduite et non-composée, le spectre $\sigma(f,g)$ est fini et il existe donc $(\mu:\lambda) \notin \sigma(f,g)$. Par le théorème 12, on a donc que ker $M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) = 0$ d'où

$$\text{rang } M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) = N^2 - 1$$

et donc il existe un (N^2-1)-mineurs de $M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#})$ non nul. Donc au moins un des (N^2-1)-mineurs de (4) est non nul car il doit être non nul après les spécialisations de U en μ et de V en λ.

Maintenant, prenons $(\mu:\lambda) \in \sigma(f,g)$. Par le théorème 12, on a

$$\dim\ker\ M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) = m(\mu:\lambda) - 1 + \omega(\mu:\lambda) + \theta(\mu:\lambda) > 0 \tag{5}$$

d'où rang $M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#}) < N^2-1$ et tous ses (N^2-1)-mineurs sont nuls. Donc $(\mu:\lambda)$ est une racine de $Spect(U,V)$.

Montrons maintenant que $(\mu:\lambda)$ est une racine de $Spect(U,V)$ de multiplicité au moins $\dim\ker\ M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#})$.

Notons $M_i(U,V)$ les sous-matrices carrées de taille N^2-1 de $M(Uf^{\#} + Vg^{\#})$. On a alors pour tout i que

$$d_i = \dim\ker\ M_i(\mu,\lambda) \geq \dim\ker\ M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#})$$

Or la multiplicité de $(\mu:\lambda)$ pour le polynôme $det(M_i(U,V))$ est supérieure à $d_i = \dim\ker\ M_i(\mu,\lambda)$. En effet, en choisissant une base de ker $M_i(\mu,\lambda)$ et en la complétant pour avoir une base de E, on obtient que l'endomorphisme associé à $M_i(U,V)$ se représente dans cette base par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} (\lambda U - \mu V)\mathbb{I}_{d_i} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que $det(M_i(U,V)) = (\lambda U - \mu V)^{d_i} det(M')$. Comme $d_i \geq \dim\ker\ M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#})$ pour tout i, alors $(\lambda U - \mu V)^{\dim\ker\ M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#})}$ divise $Spect(U,V)$ et donc que $(\mu:\lambda)$ est une racine de $Spect(U,V)$ de multiplicité au moins $\dim\ker\ M(\mu f^{\#} + \lambda g^{\#})$.

En sommant toutes ces multiplicités (5) sur le spectre $\sigma(f,g)$, on obtient

$$m(f,g) + \omega(f,g) + \theta(f,g)$$

Et comme $Spect(U,V)$ est un polynôme de degré inférieur à $N^2 - 1$, on obtient $m(f,g) + \omega(f,g) + \theta(f,g) \leq N^2 - 1$ $\square$

4.3 En quête de l'optimalité ?

L'inégalité $\rho(f,g) \leq N^2 - 1$ avait déjà été prouvée par Lorenzini et Vistoli. En plus de la retrouver par des méthodes simples, il est remarquable que l'on obtienne la même borne pour la quantité $m(f,g)+\omega(f,g)+\theta(f,g)$. On se pose donc la question de l'optimalité de cette borne. On sait seulement qu'elle est atteinte pour N=1, 2 et 3. Par exemple, pour N=3, regardons l'exemple suivant tirée de [Bod08] : prenons

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + (1+x+y)^3 \text{ et } g(x,y) = 3xy(1+x+y)$$

Les homogénéisés de f et g sont respectivement

$$f^{\#}(x,y) = x^3 + y^3 + (z+x+y)^3 \text{ et } g^{\#}(x,y) = 3xy(z+x+y)$$

On a alors $\sigma(f,g) = \{(1,-1),(1,-j),(1,-j^2),(0,1)\}$, où $\{1,j,j^2\}$ sont les racines troisièmes de l'unité. On vérifie en effet qu'on a bien :

$$\begin{aligned}
f^{\#} - g^{\#} &= (x+jy+z+jz)(x-y-jy-jz)(2x+2y+z)\\
f^{\#} - jg^{\#} &= (2x+jy+y+z)(x-2jy-jz)(x+y+jz+z)\\
f^{\#} - j^2g^{\#} &= (x+z+z+2y+2jy)(x+y-jz)(2x-jy+z)\\
g^{\#} &= 3xy(z+x+y)
\end{aligned}$$

D'où l'on calcule $\rho(f,g) = 8 = 3^2 - 1$. La borne est donc atteinte pour $\rho(f,g)$, donc aussi pour $m(f,g)$ et pour $m(f,g)+\omega(f,g)+\theta(f,g)$. On s'aperçoit ici d'une conséquence du théorème précédent :

Corollaire 15. *Si* $\rho(f,g) = N^2 - 1$ *alors* $\omega(f,g) = 0$.

C'est-à-dire que s'il existe un pinceau de courbes avec un ordre total de réductibilité égale à $N^2 - 1$, alors toutes ses fibres réductibles doivent être sans facteurs multiples.

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}
m(f,g) &= \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} e_{(\mu:\lambda),i} \right) - 1 \right) \\
&= \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} e_{(\mu:\lambda),i} - 1 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} 1 \right) - 1 \right) \\
&= \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} \left(\sum_{i=1}^{n(\mu:\lambda)} (e_{(\mu:\lambda),i} - 1) \right) + \sum_{(\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}} (n(\mu:\lambda) - 1) \\
&= \omega_{red}(f,g) + \rho(f,g)
\end{aligned}$$

et on sait que $N^2 - 1 \geq m(f,g)$, $N^2 - 1 \geq \rho(f,g)$ et $2N - 2 \geq \omega(f,g) \geq \omega_{red}(f,g)$. On peut donc remarquer que le fait que la borne pour $m(f,g)$ soit quadratique ne vient pas du fait qu'on compte les multiplicités. Dans la recherche d'un exemple qui monterait que la borne est optimale, il est donc nécessaire de regarder des exemples dont les fibres réductibles ne se décomposent qu'en facteurs simples.

Après de nombreux essais, nous n'avons pas trouvé d'exemple qui aurait pu montrer que la borne était optimale. Plus précisement, nous ne connaissons même pas d'exemple montrant que $\rho(f,g)$ est quadratique en N.

4.4 Cas particulier m(f,1)

Stein a montré que $\rho(f,1) \leq N-1$ et que cette borne était atteinte (voir [Rup89], [Lor93] et [SSA03]). En effet, avec l'exemple de Stein :

$$f(X,Y) = Y + X(Y(Y+1)(Y+2)...(Y+N-2))$$

f est de degré N et est non composée. On vérifie facilement que $\sigma(f) = \{0, 1, ...N-2\}$, car $f(X,Y) + j = (Y+j) + X\prod_{0\leq i\leq N-2}(Y+i)$ pour tout entier $0 \leq j \leq N-2$.

On peut donc se demander s'il existe aussi une meilleure borne que $N^2 - 1$ pour $m(f,1)$. En reprenant la décomposition de $m(f,g)$ calculée précédemment, on obtient facilement $m(f,1) \leq 3N - 3$.

Annexe A : Formes différentielles

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition . *Une forme p-linéaire sur E est une application*

$$L : \underbrace{E \times ...E}_{p fois} \to \mathbb{K}$$

linéaire en chaque variable.

L'ensemble des formes p-linéaires forment un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{K})$. En décomposant chaque vecteur dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E, on voit que L est uniquement déterminée par les n^p nombres $L(e_{i_1}, ..., e_{i_p})$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{K})$ est donc de dimension n^p.

Définition . *Une forme p-linéaire **alternée** sur E est une forme p-linéaire f telle que*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \; f(x_1, \ldots, x_p) = \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

Une forme p-linéaire est alternée si et seulement si $f(x_1, ..., x_p) = 0$ dès que deux des x_i sont égaux.

L'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées est noté $\bigwedge^p(E^*)$. Par convention on pose $\bigwedge^0(E^*) = \mathbb{K}$. On peut remarquer que $\bigwedge^1(E^*) = E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

On montre facilement que $\dim \bigwedge^p(E^*) = \binom{n}{p}$. Si $p > n$, on a donc $\dim \bigwedge^p(E^*) = 0$.

Définition . *L'antisymétrisée d'une forme p-linéaire alternée f sur E,noté $Alt\ f$, est donnée par*

$$(Alt\ f)(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

Définition . *Le produit extérieur de $\bigwedge^p(E^*)$ et $\bigwedge^q(E^*)$ est l'application*

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \bigwedge^p(E^*) \times \bigwedge^q(E^*) & \to & \bigwedge^{p+q}(E^*) \\ (f, g) & \mapsto & f \wedge g = \dfrac{(p+q)!}{p!q!} Alt(f \otimes g) \end{array}$$

c'est-à-dire définie par

$$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) q(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

On renvoit à [Laf96] pour la vérification que le produit extérieur est bien défini, ainsi que pour des preuves des propositions suivantes.

Proposition 1. *Le produit extérieur a les propriétés suivantes :*

1. *anticommutativité :*
$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g$$
2. *associativité :*
$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$$
3. *bilinéarité :*
$$(\alpha f + \nu g) \wedge h = \alpha f \wedge h + \nu g \wedge h$$
$$f \wedge (\alpha g + \nu h) = \alpha f \wedge g + \nu f \wedge h$$

Proposition 2. *Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale associée. Alors l'ensemble*

$$\left\{ e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \right\}$$

est une base de $\bigwedge^p(E^*)$.

Définition . *L'algèbre extérieure de E^* est l'espace vectoriel*

$$\bigwedge E^* = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^{p}(E^*)$$

de dimension 2^n.

Définition . *Une p-forme différentielle sur un ouvert U d'un espace vectoriel E est une application lisse de U dans $\bigwedge^p E^*$.*

L'espace vectoriel des p-formes différentielles sur U est noté $\Omega^p(U)$.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et soit α une p-forme différentielle. Alors, pour tout $x \in U$, on a une forme alternée

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p}(x) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

En remarquant que $e_i^* = dx^i$, on peut donc écrire

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

On peut étendre le produit extérieur aux formes différentielles :

Définition . *Soient $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega^q(U)$. On définit la $(p+q)$-forme différentielle $\alpha \wedge \beta$ par*

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$$

et toutes les propriétés du produit extérieur restent valables.

On définit l'algèbre graduée

$$\Omega(U) = \bigoplus_{i=0}^{\dim(U)} \Omega^i(U)$$

Proposition 3. *Il existe une unique application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$, appelée différentielle extérieure, ayant les propriétés suivantes :*

1. *Si $\deg(\alpha) = p$ alors $\deg(d\alpha) = p+1$.*
2. *Sur $\Omega^0(U)$, d est la différentielle des fonctions.*
3. *Si $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega(U)$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$*
4. *$d \circ d = 0$*

D'après ces propriétés, si α est une p-forme différentielle s'écrivant

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

alors on a

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} d\alpha_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

Par exemple, vérifions la propriété (4). On voit que les formes à coefficients constants ont une différentielle nulle. Donc, il suffit de vérifier que $d(df) = 0$ pour toute fonction f.

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^{n} d(\partial_j f) \wedge dx^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\partial_j f) dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\partial_i(\partial_j f) - \partial_j(\partial i f)) dx^i \wedge dx^j = 0 \end{aligned}$$

Remarque . *On peut définir plus généralement une p-forme différentielle sur une variété différentiable M comme un champ de p-formes alternées de classe C^∞ sur les espaces tangents de M. C'est-à-dire que, à tout point $m \in M$, on associe une p-forme alternée $\omega(m) \in \bigwedge^p(T_m(M))$, avec une "dépendance régulière en m". En se plaçant dans une carte local sur M, on a une base locale de l'espace vectoriel $\bigwedge^p(T_m(M))$ donnée par $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$ et ainsi on peut écrire localement les p-formes différentielles*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

avec $f_{i_1,\ldots,i_p}$ différentiables.

On peut aussi voir que l'ensemble des p-formes alternées sur $T_m(M)$ forme un espace vectoriel noté $\bigwedge^p(T_m^*(M))$. On désigne par $\bigwedge^p T^*(M)$ la réunion disjointe

$$\coprod_{m \in M} \bigwedge^p (T_m^*(M))$$

qui forme un fibré vectoriel sur M, formellement la p-ième puissance du fibré cotangent de M. Une p-forme différentielle peut se redéfinir comme une section globale de ce fibré vectoriel.

Annexe B : Code maple

```
with(algcurves):
with(LinearAlgebra):

#Application de Ruppert - L:=[G, H]
ARup := proc(F, L)
local G, H;
G:=L[1]; H:=L[2];
expand(1/z*(F*(diff(G, y))-G*(diff(F, y))-F*(diff(H, x))+H*(diff(F, x))));
end;

#Liste des monomes de degrés d en {x, y, z}
ListMonHom := proc (d)
local List, i, j, k;
List := [];
for i from d by -1 to 0 do
for j from d-i by -1 to 0 do
List := [op(List), x^i*y^j*z^(d-i-j)];
od;
od;
List;
end;

#G and H in E
GHinE := proc(d)
local H, G, i, j, k,l, lm, lc;
G:=0;H:=0;
k:=1;
for i from d-1 by -1 to 0 do
for j from d-i by -1 to 0 do
G:=G+c[k]*x^i*y^j*z^(d-i-j);
k:=k+1;
od;
od;
lc:=[coeffs(G,{x,y,z},'lm')];
lm:=[lm];
for i from d by -1 to 0 do
for j from d-i by -1 to 0 do
if (d-i-j)>0 then
```

```
H:=H+c[k]*x^i*y^j*z^(d-i-j);
k:=k+1;
else
 if member(x^(i-1)*y^(j+1),lm,'l') then H:=H-lc[l]*x^i*y^j; fi;
fi;
od;
od;
[G, H];
end;

#Prend un polynome homogene et renvoie le vecteurs des coefficients (en utilisant
PolyToVect := proc (f)
local Vect, i, j, k, d;
d := degree(f, [x, y, z]);
Vect := Vector(binomial(d+2, d));
k := 1;
for i from d by -1 to 0 do
for j from d-i by -1 to 0 do
Vect[k] := coeff(coeff(coeff(f, x, i), y, j), z, d-i-j);
k := k+1;
od;
od;
Vect;
end;

#Calcul la matrice de Ruppert à partir du vecteur coefficients...
Mat := proc (S, n, m)
local L, i;
L := [subs(c[1] = c[m+1], seq(c[j] = 0, j = 1 .. m), c[m+1] = 1, S)];
for i from 2 to n do
L := [op(L), subs(c[i] = c[m+1], seq(c[j] = 0, j = 1 .. m), c[m+1] = 1, S)] ;
od;
convert(L, Matrix);
end;

Rup:=proc(F)
local d, L, R, V;
d:=degree(F, [x, y, z]);
L:=GHinE(d-1);
R:=ARup(F, L);
```

```
V:=PolyToVect(R);
Mat(V,d^2-1, d^2-1), V;
end;

#calcul le spect(u,v) par les mineurs
Spect:=proc(R, d)
local i , j, rowdim, coldim;
rowdim := RowDimension(R);
coldim := ColumnDimension(R);
if (rowdim <> binomial(2+(2*d-3), 2)) or (coldim <> d^2-1) then error fi;
SpectRec(R, [seq(i,i=1..coldim)], rowdim, coldim, 1);
end;


SpectRec:=proc(R, L, rowdim, N, i)
local j, k, max, newList, spect;
if (i>N) then return Determinant(SubMatrix(R, L, [1 .. N])) fi;
spect:= SpectRec(R, L, rowdim, N, i+1);
max:=rowdim-L[N];
for j from 1 to max do
newList:=L;
for k from i to N do
newList:=subsop(k=newList[k]+j, newList);
od;
spect:= gcd(spect, SpectRec(R, newList, rowdim, N, i+1));
od;
spect;
end;
```

Remarque . *Notre code a pour but principal de comprendre les résultats. On peut donc facilement l'améliorer. Pour le calcul de la matrice de Ruppert par exemple, il suffit de calculer l'application de Ruppert en chaque vecteur de la base. De même, pour le calcul de Spect, il est plus rapide de calculer un forme de Smith dans une carte locale.*

Références

[BC08] Laurent Busé and Guillaume Chèze. On the total order of reducibility of a pencil of algebraic plane curves. 2008.

[Bod08] Arnaud Bodin. Reducibility of rational functions in several variables. *Israel J. Math*, 164 :333–337, 2008.

[Dar78] Gaston Darboux. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (mélanges). *Bul l. Sci. Math. 2ème série*, 2 :60–96 ; 123–144 ; 151–200, 1878.

[Dim92] Alexandru Dimca. *Singularities and topology of hypersurfaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[Gao03] Shuhong Gao. Factoring multivariate polynomials via partial differential equations. *Math. Comp*, 72(242) :801–822, 2003.

[Jou83] Jean-Pierre Jouanolou. *Théorèmes de Bertini et applications.* volume 42 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., MA, 1983.

[Laf96] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Grenoble sciences. Edp Sciences, 1996.

[Lor93] Dino Lorenzini. Reducibility of polynomials in two variables. *J. Algebra*, 156(1) :65–75, 1993.

[Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique. Une introduction.* savoirs actuels. InterEditions, Paris, 1995.

[Poi91] Henri Poincaré. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre. *Rendiconti des Circulo Matematico di Palermo*, 5 :161–191, 1891.

[Rup86] Wolfgang Ruppert. Reduzibilität ebener kurven. *J. Reine Angew. Math.*, 369 :167–191, 1986.

[Rup89] Wolfgang Ruppert. The total reducibility order of a polynomial in two variables. *Israel J. Math.*, 68(1) :109–122, 1989.

[Sch00] Andrzej Schinzel. *Polynomials with special regard to reducibility.* Cambridge. Cambridge University Press, New York, 2000.

[Sch07] Peter Scheiblechner. *On the complexity of counting irreducible components and computing betti numbers of algebraic variety.* PhD thesis, University of Paderborn, 2007.

[SSA03] Avinash Sathaye Shreeram S. Abhyankar, William J. Heinzer. Translates of polynomials. In *A tribute to C. S. Seshadri (Chennai, 2002)*, page 51–124, Basel, 2003. Birkhäuser.