Classe:
Nom :
Prénom :

Interro TD 3

Sujet A

Date:

Correction :

On considère l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1) Expliciter la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

2) Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad a + 2b - 2c + 4d = 0 \right\}$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

$O_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in F$.

Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$ et on vérifie que c'est un élément de F :

$$\begin{aligned} &(\lambda a + a') + 2(\lambda b + b') - 2(\lambda c + c') + 4(\lambda d + d') \\ =&\lambda\underbrace{(a + 2b - 2c + 4d)}_{=0 \text{ car } M \in F} + \underbrace{(a' + 2b' - 2c' + 4d')}_{=0 \text{ car } N \in F} = \lambda 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Justifier qu'on peut prévoir $\dim(F) = 3$.

On peut prévoir $\dim(F) = \dim(M_2(\mathbb{R})) -$ nb éq linéairements indépendantes $= 4 - 1 = 3$. Ce qui revient à prévoir le nombre de variables libres dans le système d'équation définissant F.

c) Donner une base de F, qu'on notera $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$, en explicitant bien les coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad a + 2b - 2c + 4d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad a = -2b + 2c - 4d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2b + 2c - 4d & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ une base de F avec $w_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $w_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dis, $w_1 = -2e_1 + e_2$ donc ses coordonnées sont $w_1 = (-2, 1, 0, 0)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. De même, les coordonnées de $w_2 = (2, 0, 1, 0)$ et $w_3 = (-4, 0, 0, 1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

d) Proposer une méthode, en une phrase et sans faire les calculs, pour prouver que votre famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de F.

L'égalité suivante

$$F = \left\{ b\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

exprime clairement que notre famille w_1, w_2, w_3 est génératrice de F. On pourrait aussi écrire $F = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Pour vérifier que c'est une base de F, il reste seulement à montrer que c'est aussi une famille libre. On rappelle que par définition, la famille w_1, w_2, w_3 est libre si pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$ **implique** $a = b = c = 0$.

3) On pose $u_1 = (-4; 1; 1; 1)$, $u_2 = (2; 2; 7; 2)$, $u_3 = (-16; 9; -7; -4)$ et $u_4 = (-18; 12; 1; -1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

a) En appliquant l'algorithme de calcul du rang, montrer que $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Quels sont les coordonnées de u_4 dans cette base ?

Appliquons l'algorithme :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ -4 & 2 & -16 & -18 \\ 1 & 2 & 9 & 12 \\ 1 & 7 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} u'_1 = u_2 & u'_2 = u_1 & u'_3 = u_3 & u'_4 = u_4 \\ 2 & -4 & -16 & -18 \\ 2 & 1 & 9 & 12 \\ 7 & 1 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} u''_1 = u'_1 & u''_2 = u'_2 + 2u'_1 & u''_3 = u'_3 + 8u'_1 & u''_4 = u'_4 + 9u'_1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 25 & 30 \\ 7 & 15 & 49 & 64 \\ 2 & 5 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} u^{(3)}_1 = u''_1 & u^{(3)}_2 = u''_2 & u^{(3)}_3 = u''_3 - 5u''_2 & u^{(3)}_4 = u''_4 - 6u''_2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 15 & -26 & -26 \\ 2 & 5 & -13 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} u^{(4)}_1 = u^{(3)}_1 & u^{(4)}_2 = u^{(3)}_2 & u^{(4)}_3 = u^{(3)}_3 & u^{(4)}_4 = u^{(3)}_4 - u^{(3)}_3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 15 & -26 & 0 \\ 2 & 5 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{rang}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$ et

$$\begin{aligned} 0 &= u^{(4)}_4 \\ &= u^{(3)}_4 - u^{(3)}_3 \\ &= (u''_4 - 6u''_2) - (u''_3 - 5u''_2) = -u''_2 - u''_3 + u''_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -(u_2' + 2u_1') - (u_3' + 8u_1') + (u_4' + 9u_1')\\ &= -u_1' - u_2' - u_3' + u_4'\\ &= -u_2 - u_1 - u_3 + u_4\end{aligned}$$

On en déduit donc $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$ et $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

b) Montrer que $\mathcal{B}''$ est une base de F.
On vérifie que $u_1 \in F$, tout comme $u_2 \in F$ et $u_3 \in F$. On a donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \subset F$.
Or, d'après la question précédente,

$$\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rang}(u_1, u_2, u_3) = 3 = \dim F$$

Finalement, $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et donc $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, u_3)$ est aussi une base de F.

c) Expliciter les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathcal{B}'$.
Très facile car la base $\mathcal{B}'$ est "échelonnée". On en déduit directement : $u_1 = (-4; 1; 1; 1) = w_1 + w_2 + w_3$, $u_2 = (2; 2; 7; 2) = 2w_1 + 7w_2 + 2w_3$ et $u_3 = (-16; 9; -7; -4) = 9w_1 - 7w_2 - 4w_3$.

d) Expliciter la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}''$ à la base $\mathcal{B}'$. En déduire les coordonnées du vecteur w_2 dans la base $\mathcal{B}''$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} = P^{-1}$$

On calcule l'inverse

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{14}{65} & \frac{-2}{5} & \frac{77}{65} \\ \frac{3}{65} & \frac{1}{5} & \frac{-16}{65} \\ \frac{1}{13} & 0 & \frac{-1}{13} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

On en déduit par exemple les coordonnées de w_2 dans la base $\mathcal{B}''$:

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\frac{-2}{5} u_1 + \frac{1}{5} u_2 = \frac{-2}{5} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien w_2.