Classe:
Nom :
Prénom :

Interro TD 2

Sujet A

Date:

Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que M est inversible en utilisant le déterminant.
2) Calculer son inverse avec l'algorithme utilisant les matrices élémentaires.
3) En déduire, pour tout t réel, les solutions du système suivant :

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & t \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{array} \right.$$

4) Expliciter la solution du système précédent lorsque $t = \frac{4}{3}$.

Correction :

1) Calculons par exemple le déterminant en le développant suivant la $2^{\text{ième}}$ ligne :

$$\det(M) = -2 \times \det \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\det(M) = -2(-4 \times 1 - 1 \times 4) - (2 \times 1 - 4 \times (-4)) = -2 \times (-8) - 18 = -2$$

Comme $\det(M) = -2 \neq 0$, on en déduit que M est inversible.

2) Appliquons l'algorithme :

$$\begin{array}{l|l}
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & -7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 36 & -27 \\ 0 & 36 & -28 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 36 & -27 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ 1 & -9 & 4 \end{pmatrix} = T_{3,2}(-1)D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 4 \end{pmatrix} = D_2(\frac{1}{9})T_{3,2}(-1)D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 28 & -12 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} T_{2,3}(3)D_3(-1) \\ D_2(\frac{1}{9})T_{3,2}(-1)D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & -36 & 16 \\ -4 & 28 & -12 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} T_{1,3}(-4)T_{2,3}(3)D_3(-1) \\ D_2(\frac{1}{9})T_{3,2}(-1)D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \end{array}
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{rrr} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 28 & -12 \\ -1 & 9 & -4 \end{array}\right) \right. = \begin{array}{l} T_{1,2}(1)T_{1,3}(-4)T_{2,3}(3)D_3(-1) \\ D_2(\frac{1}{9})T_{3,2}(-1)D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{rrr} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{array}\right) \right. = \begin{array}{l} D_1(\frac{1}{2})D_2(\frac{1}{4})T_{1,2}(1)T_{1,3}(-4)T_{2,3}(3)D_3(-1) \\ D_2(\frac{1}{9})T_{3,2}(-1)D_2(9)D_3(4)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-1) \end{array}$$

On obtient donc $M^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$

3) Le système peut s'écrire comme une équation matricielle :

$$(E) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'où, par les propriétés des opérations matricielles :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/2 - 8 - 6 \\ -t + 14 + 9 \\ -t + 18 + 12 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/2 - 14 \\ -t + 23 \\ -t + 30 \end{pmatrix}$$

4) Pour $t = \frac{4}{3}$, la solution correspondante est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} - 14 \\ -\frac{4}{3} + 23 \\ -\frac{4}{3} + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} \\ \frac{65}{3} \\ \frac{86}{3} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $x_1 = -\frac{40}{3}$, $x_2 = \frac{65}{3}$, et $x_3 = \frac{86}{3}$.

Classe:
Nom :
Prénom :

Interro TD 2

Sujet B

Date:

Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que M est inversible en utilisant le déterminant.
2) Calculer son inverse avec l'algorithme utilisant les matrices élémentaires.
3) En déduire, pour tout t réel, les solutions du système suivant :

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & t \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

4) Expliciter la solution du système précédent lorsque $t = 6$.

Classe:
Nom :
Prénom :

Interro TD 2

Sujet C

Date:

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que M est inversible en utilisant le déterminant.
2) Calculer son inverse avec l'algorithme utilisant les matrices élémentaires.
3) En déduire, pour tout t réel, les solutions du système suivant :

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & & & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ 8x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & t \end{array} \right.$$

4) Expliciter la solution du système précédent lorsque $t = 2$.

Classe:
Nom :
Prénom :

Interro TD 2

Sujet D

Date:

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que M est inversible en utilisant le déterminant.
2) Calculer son inverse avec l'algorithme utilisant les matrices élémentaires.
3) En déduire, pour tout t réel, les solutions du système suivant :

$$(E)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & t \end{array}\right.$$

4) Expliciter la solution du système précédent lorsque $t = \frac{2}{7}$.